МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ по дисциплине
ОП.07 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
Основной профессиональной образовательной программы
15.02.17 МОНТАЖ, ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ, ЭКСПЛУАТАЦИЯ И РЕМОНТ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Самостоятельная работа проводится с целью:

− систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;

− углубления и расширения теоретических знаний;

− развития познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности, организованности;

− формирование самостоятельности мышления, способности к самоорганизации;

− развития исследовательских умений.

I. Изучите теоретический материал и пример решения задачи

В различных исследованиях приходится использовать формулы, составленные на основании исследования какого-либо физического, химического, экономического процесса. Одним из лучших способов получения таких формул является *метод наименьших квадратов.* Пусть необходимо установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами x и y. Например, между кредитными вложениями банков и их прибылью.

По результатам изучения некоторых данных составим следующую таблицу:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

Установим вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости точек $(x_i,\, y_i)$. Предположим, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой $y = ax + b$.

Так как точки $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, …, $(x_n,\, y_n)$ лежат в общем случае не на прямой $y = ax + b$, а лишь вблизи нее, то в формуле $y = ax + b$ при подстановке координат точек $(x_i,\, y_i)$ знак равенства нужно заменить знаком приближенного равенства: $y_i \approx ax_i + b$. Обозначим разницу между левой и правой частью этого приближённого равенства через δ_i, то есть $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ $(i = 1,\, 2,\, \dots,\, n)$. Назовём эти величины погрешностями.

Поставим задачу подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы эти погрешности были возможно меньше по абсолютной величине. Для этого составим функцию от переменных a и b, которая выражает сумму квадратов этих погрешностей

$$S(a,\, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 .$$

Таким образом, задача свелась к нахождению значений a и b, при которых функция $S(a, b)$ имеет минимум.

Найдём частные производные первого порядка этой функции по переменным a и b:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right].$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] x_i = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к более удобному для решения виду.

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] x_i = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right] = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Эта система называется *нормальной системой метода наименьших квадратов.* Из неё находим числа a и b, и затем, подставляя их в уравнение $y = ax + b$, получаем уравнение искомой прямой.

Тот факт, что функция $S(a, b)$ в найденной точке $M(a, b)$ имеет минимум, устанавливается с помощью частных производных второго порядка.

Имеем $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$.

Тогда $\Delta = \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 > 0$. Кроме того $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$. Следовательно, функция $S(a, b)$ в точке $M(a, b)$ имеет минимум.

Пример. Пусть в результате эксперимента получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента x. Данные занесены в таблицу (столбцы 2 и 3). Значения x заносятся в таблицу в порядке возрастания.

Будем искать зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$. Для составления нормальной системы метода наименьших квадратов заполним таблицу.

n	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1	5,5	5,5	1
2	3	6,3	18,9	9
3	6	6,7	40,2	36
4	18	9,2	165,6	324
5	20	9,6	192,	400
Сумма	48	37,3	422,2	770

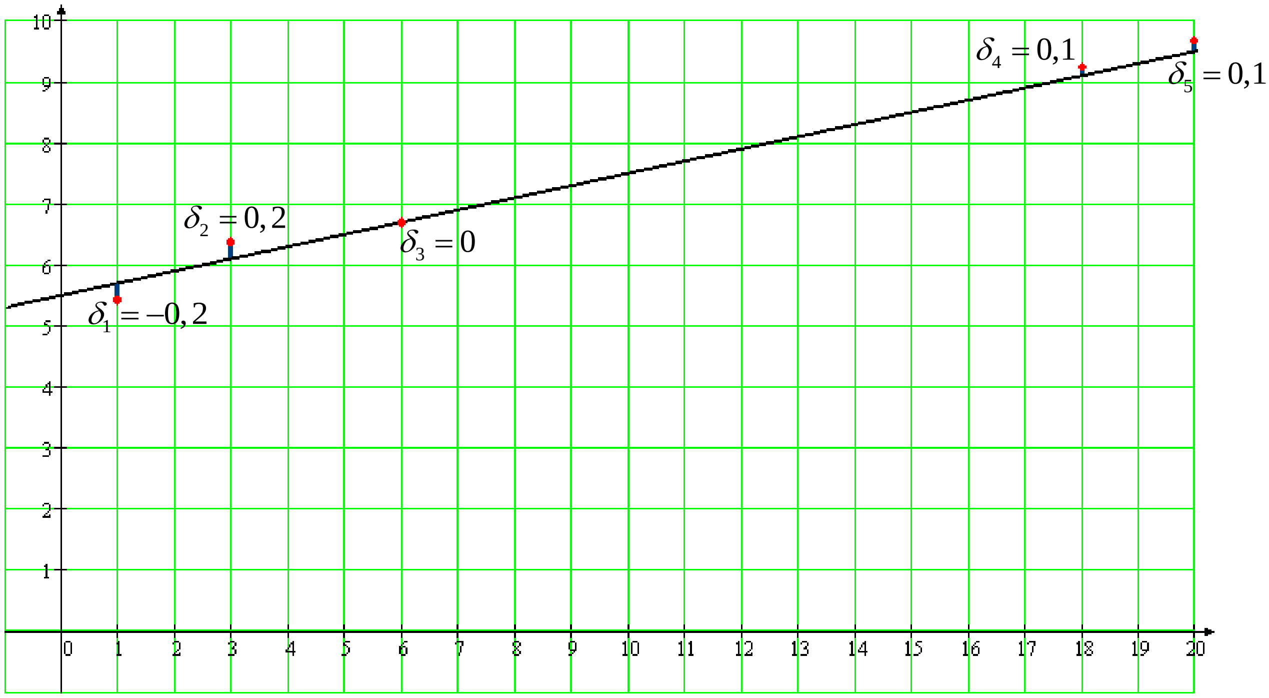
Нормальная система имеет вид $\begin{cases} 770a + 48b = 422,2, \\ 48a \ + \ 5b = 373. \end{cases}$

Эту систему можно решить, например, по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 770 & 48 \\ 48 & 5 \end{vmatrix} = 1546, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 422,2 & 48 \\ 37,3 & 5 \end{vmatrix} = 320,6, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 770 & 422,2 \\ 48 & 37,3 \end{vmatrix} = 8455,4.$$

Её решение $a = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{320,6}{1546} = 0,21 \approx 0,2$, $b = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{8455,4}{1546} = 5,47 \approx 5,5$. Уравнение искомой прямой $y = 0,2x + 5,5$.

На чертеже в системе координат изобразим все точки $(x_i,\ y_i)$ (показаны красным цветом), построим прямую $y=0,2x+5,5$ и покажем погрешности δ_i в виде вертикальных отрезков (показаны синим цветом). При этом прямую $y=0,2x+5,5$ построим по двум точкам, например, $(0;\ 5,5)$ и $(20;\ 9,5)$.



II. Решите задачу своего варианта по предложенному плану и сдайте преподавателю на проверку

План решения задачи

1. Заполните таблицу, приведённую в примере.

2. Составьте нормальную систему метода наименьших квадратов и решите её. Промежуточные вычисления производите с двумя знаками после запятой. В результате значения a и b округлите до одного знака. Запишите уравнение искомой прямой $y=ax+b$.

3. Изобразите на листочке в клетку в одной системе координат прямую $y=ax+b$ и все точки с координатами $(x_i,\ y_i)$. Единица масштаба должна соответствовать двум клеткам.

4. Покажите на чертеже погрешности δ_i.

ВАРИАНТЫ

Вариант 1					
x	1	3	6	13	20
y	–2,1	–1,1	–1,2	0,2	2,1

Вариант 2					
x	3	10	15	16	19
y	–1,1	0	1,2	1	1,6

Вариант 3					
x	1	12	16	18	20
y	–2,1	0,7	1	1,6	2,2

Вариант 4					
x	2	8	9	15	18
y	–1,6	–0,2	0,1	1,2	1,6

Вариант 5					
x	8	9	11	16	20
y	–0,2	0,1	0,6	1	2,2

Вариант 6					
x	4	8	9	16	19
y	4,4	7,9	8,9	14,7	16,7

Вариант 7					
x	1	3	6	13	20

Вариант 8					
x	3	10	15	18	19

y	1,3	3,3	5,8	10,3	16,7

y	2,7	7,9	11,9	14,7	15,2

Вариант 9					
x	1	5	9	12	18
y	1,3	5,2	7,9	10,3	15,2

Вариант 10					
x	5	6	16	17	20
y	5,2	5,8	13,3	14,7	16,7

Вариант 11					
x	1	8	9	16	18
y	1,3	–6,8	–8,3	–17	–19,2

Вариант 12					
x	4	8	9	16	19
y	–2,7	–6,8	–8,3	–17	–20,1

Вариант 13					
x	1	3	6	12	19
y	1,3	–0,7	–4,3	–11,8	–20,1

Вариант 14					
x	3	10	15	16	19
y	–0,7	–9,4	–15,2	–17	–20,1

Вариант 15					
x	1	4	9	16	18
y	1,3	–2,7	–8,3	–17	–19,2

Вариант 16					
x	5	9	11	13	18
y	4,5	1,5	–0,6	–2,2	–7,3

Вариант 17					
x	2	6	9	11	16
y	7,6	3,9	1,5	–0,6	–4,9

Вариант 18					
x	4	8	9	16	19
y	6	1,9	1,5	–4,9	–8

Вариант 19					
x	1	3	6	13	20
y	8,5	6,6	3,9	–2,2	–8

Вариант 20					
x	3	10	13	14	19
y	6,6	0,2	–2,2	–3,3	–8